# Μάθημα 11ο

22/5/19

## $\chi^2$ τεστ ομογένειας r ανεξάρτητων πολυωνυμικών κατανομών

| Κατηγορία (j) / Δείγμα (i) | 1 | 2 | ... | j | ... | k | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(e_{11})$ $n_{11}$ | $(e_{12})$ $n_{12}$ | ... | $(e_{1j})$ $n_{1j}$ | ... | $(e_{1k})$ $n_{1k}$ | $n_{1\cdot}$ |
| 2 | $n_{21}$ | $n_{22}$ | ... | $n_{2j}$ | ... | $n_{2k}$ | $n_{2\cdot}$ |
| 3 | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| i | $(e_{i1})$ $n_{i1}$ | $(e_{i2})$ $n_{i2}$ | ... | $\boxed{(e_{ij})\ n_{ij}\ P_{ij}}$ | ... | $(e_{ik})$ $n_{ik}$ | $n_{i\cdot}$ |
| ⋮ | | | | | | | |
| r | $(e_{r1})$ $n_{r1}$ | $n_{r2}$ | ... | $n_{rj}$ | ... | $(e_{rk})$ $n_{rk}$ | $n_{r\cdot}$ |
| | $n_{\cdot 1}$ | $n_{\cdot 2}$ | ... | $n_{\cdot j}$ | ... | $n_{\cdot k}$ | $n = n_{\cdot\cdot}$ |

$n_{ij}$ = αριθμός πειραματικών μονάδων στη j κατηγορία από το δείγμα i.

$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} n_{ij}$ = μέγεθος για το δείγμα i

$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$ = σύνολο για την j κατηγορία

$n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} n_{ij}$

$P_{ij} = P$( ένα μέλος του r πληθυσμού και τη j κατηγορία )

$H_0$: τα r δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό
$= p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{rj} = p_j \quad , j = 1, \dots, k$

$(n_{i1}, \dots, n_{ik}) \sim M(n_{i\cdot}, p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik}) \quad , i = 1, \dots, r$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1.$$

$n_{ij}$ : παρατηρούμενες συχνότητες
$e_{ij}$ : αναμενόμενες συχνότητες

$e_{ij} = n_{i\cdot} \cdot p_{ij}$ και για το δείγμα i :

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - n_{i\cdot} p_{ij})^2}{n_{i\cdot} p_{ij}} \overset{προσ.}{\sim} \chi^2_{k-1}$$

Τα r δείγματα είναι ανεξάρτητα, άρα :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - n_{i\cdot} p_{ij})^2}{n_{i\cdot} p_{ij}} \overset{προσ.}{\sim} \chi^2_{r(k-1)}$$

Κρ. περιοχή: $\chi^2 \geq \chi^2_{a, r(k-1)}$.

Άγνωστες Παράμετροι: → $(k-1)$ άγνωστοι παράμ.

$$\hat{p}_j = \frac{n_{\cdot j}}{n} \quad , j = 1, \dots, k \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1.$$

Βαθμοί ελευθερίας:
$r(k-1) - (k-1) = (r-1)(k-1)$

Άρα $e_{ij} = n_{i\cdot} \hat{P}_j = \dfrac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}$.

Άρα

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \overset{προσ.}{\sim} \chi^2_{(r-1)(k-1)} \text{ όταν } H_0 \text{ αλη}$$

και κρ. περιοχή: $\chi^2 > \chi^2_{a,(r-1)(k-1)}$.

π.χ 1. (παράδειγμα 1.6.1 σ.32 - Ζωγράφου)

Παράδειγμα 2

| | j=1 Ντοκιμαντέρ | j=2 Σίριαλ | j=3 Μόδα | |
|---|---|---|---|---|
| Αγόρια (i=1) | (33.3) $n_{11} = 50$ | (36.7) $n_{12} = 30$ | (30) $n_{13} = 20$ | $n_{1\cdot} = 100$ |
| Κορίτσια (i=2) | (66,7) $n_{21} = 50$ | (73,3) $n_{22} = 80$ | (60) $n_{23} = 70$ | $n_{2\cdot} = 200$ |
| | $n_{\cdot 1} = 100$ | $n_{\cdot 2} = 110$ | $n_{\cdot 3} = 90$ | $n = 300$ |

$H_0$: $P_{1j} = P_{2j} = P_j \quad (j = 1, 2, 3)$
δεν υπάρχει διαφορά, $\alpha = 5\%$.

$e_{ij} = \dfrac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}$ δηλ. $e_{12} = \dfrac{100 \cdot 110}{300} = 36,7$

$$\chi^2 = \frac{(50-33,3)^2}{33,3} + \dots + \frac{(70-60)^2}{60} = 19,39$$

Επειδή $19,33 > 5,991 \, (= \chi^2_{0,05,2})$
απορρ. η $H_0$.

$r = 2$
$k = 3$

## Παράδειγμα

Οστα ανα φύλο και περίοδο

| | Πρωτη (j=1) | Δευτερη (j=2) | Τρίτη (j=3) | |
|---|---|---|---|---|
| Ανδρας (i=1) | $n_{11}=162$ (152,12) | $n_{12}=180$ (170,58) | $n_{13}=210$ (229,) | $n_{1\cdot}=552$ |
| Γυναικα (i=2) | $n_{21}=110$ (119,88) | $n_{22}=125$ (125) | $n_{23}=200$ (180,70) | $n_{2\cdot}=435$ |
| | $n_{\cdot 1}=272$ | $n_{\cdot 2}=305$ | $n_{\cdot 3}=410$ | $n=987$ |

$H_0: P_{1j}=P_{2j}=P_j \quad (j=1,2,3)$

δηλ. δεν υπάρχει διαφορά, $a=0.05$

$e_{ij}=\dfrac{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}{n}$ δηλ. $e_{12}=\dfrac{552\cdot 305}{987}=170,58$

$$\chi^2=\frac{(162-(152,12))^2}{152,12}+\dots+\frac{(200-180,70)^2}{180,70}=6,32$$

$\chi^2=6,32>5,991\ (=\chi^2_{0.05,2})$ απορρ. $H_0$

Αρα οι αναλογία διαφέρουν

II.x

| Κατηγορία (j) / Δείγμα (i) | Αποτέλεσμα: Ευνοϊκό (j=1) | Μη ευνοϊκό (j=2) | |
|---|---|---|---|
| Θεραπεία I (i=1) | $n_{11}=70$ (79,6) | $n_{12}=30$ (20,4) | $n_{1\cdot}=100$ |
| Θεραπεία II (j=2) | $n_{21}=160$ (159,2) | $n_{22}=40$ (40,8) | $n_{2\cdot}=200$ |
| Θεραπεία III (j=3) | $n_{31}=168$ (159,2) | $n_{32}=32$ (40,8) | 200 |
| | $n_{\cdot 1}=398$ | $n_{\cdot 2}=102$ | $n=500$ |

$H_0: P_{1j} = P_{2j} = P_{3j} = P_j \quad , j=1,2.$

(Τα ποσοστά των ευνοϊκών αποτ. ίσα και στα 3 θεραπεία).

$$e_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{n}$$

$$X^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad \left(\overset{\pi\rho o\sigma}{\sim} X^2_2 \text{ όταν } H_0\right)$$

$$X^2 = \frac{(70-79,6)^2}{79,6} + \dots + \frac{(32-40,8)^2}{40,8} = 8,08$$

$$X^2 = 8,08 > X^2_{0.05,2} = 5,991 = X^2_{a,(r-1)(k-1)}$$

απορρ. η $H_0$

Δεν έχουν και οι 3 θεραπεία τα ίδια αποτελεσματικότητα.